ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 41, № 2
ноябрь, 1979

МОДЕЛЬ КИРАЛЬНОГО ПОЛЯ И УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. II

Е. Р. Нисимов, С. Й. Пачева

В рамках построенного в части I неканонически перенормированного с мягкой массой $1/N$-разложения $O(N)(\varphi^2)_3{}^2$-модели, свободного от инфракрасных расходимостей, доказаны существование критического предела и его совпадение с конформно-инвариантной критической теорией $O(N)$-инвариантного кирального поля. Доказательство существенно использует обобщенные соотношения квантовой киральности предельной универсальной теории. Построено $1/N$-разложение сверхперенормируемых «температурного» и «магнитного» возмущений предасимптотической и критической теорий, что является важным для теоретико-полевого описания критического поведения.

1. ВВЕДЕНИЕ

В первой части настоящей работы [1] [1)], используя модифицированную Боголюбова – Парасюка – Хеппа – Циммерманна – Ловенштейна (БПХЦЛ) схему перенормировок с мягкой массой и с дополнительными инфракрасными вычитаниями [2], было построено неканонически перенормированное (с ультрафиолетовыми сверхвычитаниями) $1/N$-разложение $O(N)$-инвариантной $(\varphi^2)_3{}^2$-модели в высоко- и низкотемпературной фазах, а также в предасимптотической безмассовой теории, свободное от инфракрасных расходимостей (ИКР) в каждой отдельной диаграмме. Эффективный (в смысле Циммерманна [3]) перенормированный лагранжиан имеет вид (1.20)

$$\begin{aligned}(1)\qquad \mathscr{L}_{\mathrm{eff}}(x;\ \bar a,\ \bar b;\ u) = &-{}^1/_2(1+\bar b)\mathscr{N}_3{}^3[(\partial_\mu\varphi^2]_\otimes(x)+\\ &+(N/2)\mathscr{N}_3{}^3[\sigma(G_u{}^{-1}\sigma)]_\otimes(x)-{}^1/_2\mathscr{N}_3{}^3[m(s)^2\varphi^2]_\otimes{}^*(x)-\\ &-{}^1/_2\mathscr{N}_3{}^3[\sigma(\varphi^2+2(\varphi,F)s^{1/2})]_\otimes{}^*+(N/2)\bar a\sigma(x)-\\ &-(\bar c/2)\mathscr{N}_3{}^3[\sigma(\varphi^2+2(\varphi,F)s^{1/2})]_\otimes.\end{aligned}$$

Методом дифференциально-вершинных операций [4] были выведены уравнения ренормализационной группы (РГ) (1.24)–(1.26), и из явного выражения для β-функции (1.25в) следовало, что имеется единственный (в рамках $1/N$-разложения) нетривиальный инфракрасностабильный нуль $u=0$ ($u=1/\lambda_0$ – обратная константа связи) при условии, что существует предел $u\to 0$ в связных функциях Грина $\langle X_\varphi X_\sigma\rangle$ (в обозначениях (1.8) $\sigma(x)$ – вспомогательное поле, см. [1, раздел 2]). В этом пре-

[1)] Здесь везде будем пользоваться обозначениями работы [1]. При ссылках на формулы из [1] перед номером соответствующей формулы ставится цифра 1.

деле диаграммная техника $1/N$-разложения $(\varphi^2)_3{}^2$-модели формально совпадает с диаграммной техникой $1/N$-разложения $O(N)$-инвариантного кирального поля, но при этом возникают дополнительные логарифмические ультрафиолетовые расходимости в отдельных одночастично-неприводимых диаграммах с шестью внешними φ-линиями $\gamma_{(6,0)}$ (см. [1, раздел 2]). Однако, как будет доказано в следующем разделе с помощью обобщенных тождеств Циммерманна [5] и соотношений квантовой предкиральности (1.17), сумма всех связных диаграмм $G_{(L_\varphi,L_\sigma)}$ (с $L_{\varphi,\sigma}$ внешними φ-, соответственно σ-линиями) в данном порядке по $1/N$, перенормированных неканонически с оператором вычитания (1.7), (1.10), (1.11), отличается от суммы топологически тех же самых $G_{(L_\varphi,L_\sigma)}$, перенормированных с дополнительными ультрафиолетовыми вычитаниями (УФВ) для $\gamma_{(6,0)}$-(под)диаграмм: $\delta(\gamma_{(6,0)})=0$ (т. е. с оператором вычитания таким же, как для кирального поля [6]), в пределе $u\to 0$ только на члены, имеющие поведение $O(u(\ln u)^z)$, z — некоторая степень, чье конкретное значение несущественно. Отсюда и из нарушенного при $(u\neq 0)$ масштабного тождества Уорда — Такахаши (1.29) следует, что критическая $O(N)(\varphi^2)_3{}^2$-теория существует в каждом порядке $1/N$-разложения, совпадает с критической теорией кирального поля и является конформно-инвариантной.

Для последовательного теоретико-полевого анализа критического поведения необходимо ввести дополнительные «температурное» и «магнитное» возмущения к эффективному лагранжиану предасимптотической (или критической) теории:

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}(x;\bar{b},\bar{c};u)-\mu t(N/2)\sigma(x)+(H,\varphi(x)), \tag{2}$$

где t описывает малые отклонения от критической температуры T_c: $t=(T-T_c)T_c^{-1}$. Подобные сверхперенормируемые возмущения (с инфракрасными размерностями меньше размерности евклидова пространства-времени D) не существуют как отдельные вставки в функциях Грина из-за нарастающих ИКР, что, конечно, является следствием неаналитичности по t и H. В настоящей работе сформулирована простая процедура их пересуммирования, не меняющая порядок теории возмущения по $1/N$. В результате возмущенная теория [2] описывается новым, уже массивным эффективным лагранжианом. С помощью дифференциальных уравнений для функций Грина: уравнений РГ и нарушенной масштабной инвариантности (уравнений Калана — Симанзика (КС) в высокотемпературной фазе и уравнений голдстоуновского предела (ГП) в низкотемпературной фазе), показано отсутствие ИКР в новом $1/N$-разложении. Отсюда возникает способ корректного введения критических показателей ν и β, выражающихся через аномальные размерности σ- и φ- (или n-) полей в критической точке.

План настоящей части работы следующий. В разделе 2 доказывается существование критического предела для предасимптотической $O(N)\cdot(\varphi^2)_3{}^2$-теории. В разделе 3 выведены дифференциальные уравнения методом дифференциально-вершинных вставок. В разделе 4 построено $1/N$-разложение для «температурного» и «магнитного» возмущений предасимптотической и критической теорий. В приложении дана схема доказательства обобщения теоремы Вайнберга об асимптотическом поведении диаграмм [7] на случай используемой здесь модифицированной вычитательной схемы с мягкой массой.

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ КРИТИЧЕСКОГО ПРЕДЕЛА

При помощи формулы суммирования по лесам (R-операция) [3] каждому одночастично-неприводимому графу $\Gamma \equiv \Gamma_{(L_\varphi, L_\sigma)}$ ставится в соответствие перенормированное выражение. Обозначим через $\mathscr{R}_\Gamma$ это выражение, полученное при применении оператора вычитания $\tau^{\delta,\rho}$ (1.7), (1.10)–(1.11), а через $\mathscr{R}_\Gamma^{(+)}$ – при применении τ^{δ^+,ρ^+}, где $\delta^+(\gamma_{(6,0)})=0$, остальные $\delta^+(\gamma)$, $\rho^+(\gamma)$, как в (1.10)–(1.11) (т. е. во втором случае τ^{δ^+,ρ^+} такой же, как для кирального поля [6]). Здесь и далее второй тип перенормировки будет отмечаться знаком «+». Используя обобщенные тождества Циммерманна [5], получаем

$$\mathscr{R}_\Gamma = \mathscr{R}_\Gamma^{(+)} + \sum_{\{\zeta^1,\ldots,\zeta^c\}} \Big[\prod_{\zeta^j_{(6,0)}} (t^0_{p_j,s}\mathscr{R}_{\zeta^j_{(6,0)}})\Big] \mathscr{R}^{(+)}_{\Gamma/\{\zeta\}}, \quad \zeta^j \equiv \zeta^j_{(6,0)}, \tag{3}$$

где сумма пробегает по всем возможным разбиениям $\{\zeta\} \equiv \{\zeta^1,\ldots,\zeta^c\}$, $1ЧН\zeta^j_{(6,0)} \subset \Gamma$, $\zeta^j \cap \zeta^{j'} = \varnothing$ (1ЧН – одночастично-неприводимый). Очевидно, $\lim\limits_{u\to 0} \mathscr{R}_\Gamma^{(+)}$ существует и равен в точности соответствующему вкладу Γ в критической киральной теории (если отсутствуют вставки конечных контрчленов

$$\bar{b}(u)\Delta_1 \equiv -{}^1/{}_2\bar{b}(u)\int d^3x\mathscr{N}_3{}^3[(\partial_\mu\varphi)^2]_\otimes(x), \qquad \bar{c}(u)\Delta_2\int d^3x\mathscr{N}_3{}^3[\sigma\varphi^2]_\otimes(x)).$$

С другой стороны, отсутствие УФВ для поддиаграмм $\gamma_{(6,0)}$ приводит к логарифмическим расходимостям в критическом пределе $u\to 0$ для отдельных диаграмм (см. приложение), и, следовательно, согласно (3) $\mathscr{R}_\Gamma$ для любого Γ, а также $\bar{b}(u)$, $\bar{c}(u)$ могут иметь не более чем логарифмические расходимости при $u\to 0$.

С учетом (3), (1.22) для производящего функционала связных функций Грина (1.8) : $\langle X_\varphi X_\sigma\rangle$, порождаемых $\mathscr{L}_{\text{eff}}$ (1) (при $m=0$, $f=0$), имеем

$$W[J,\chi;\mathscr{L}_{\text{eff}}(\bar{b}'\,\bar{c};u)] = W\left[J,\frac{\chi}{1+\bar{c}};\mathscr{L}_{\text{eff}}\left(\bar{b},0;\frac{u}{(1+\bar{c})^2}\right)\right] = \tag{4}$$
$$= W_{(+)}\left[J,\frac{\chi}{1+\bar{c}};\mathscr{L}_{\text{eff}}\left(\bar{b},0;\frac{u}{(1+\bar{c})^2}\right) + e(u)\mathscr{N}_3{}^3[(\varphi^2)^3]_\otimes(x)\right],$$

где коэффициент $e(u)$ однозначно определяется (в $1/N$-теории возмущений) в терминах $[\overset{0}{t}_{p,s}\mathscr{R}_{\gamma_{(6,0)}}]$.

Теперь в результате применения соотношений квантовой предкиральности (1.17) и тождеств Циммерманна (1.23в), получаем следующую важную формулу:

$$\frac{\delta}{\delta e(u)} W_{(+)}\left[J,\frac{\chi}{1+\bar{c}}\;\mathscr{L}_{\text{eff}}\left(\bar{b},0;\frac{u}{(1+\bar{c})^2}\right)+\right. \tag{5}$$

$$+e(u)\mathcal{N}_3{}^3[(\varphi^2)^3]_\otimes(x)\Big]=$$

$$=\Big[\int d^3y\mathcal{N}_3{}^3[(\varphi^2)^3]_\otimes(y)\Big]W_{(+)}\Big[J,\frac{\chi}{1+\bar{c}};\mathcal{L}_{\mathrm{eff}}\Big(\bar{b},0;\frac{u}{(1+\bar{c})^2}\Big)+$$

$$+e(u)\mathcal{N}_3{}^3[(\varphi^2)^3]_\otimes(x)\Big]=$$

$$=\Big\{\alpha_1(u)\Delta_1+\alpha_2(u)\Delta_2-N\frac{u}{\mu}\alpha_3(u)\Big[\int d^3y\mathcal{N}_3{}^3[\{(\varphi^2)^2\}\sigma]_\otimes(y)\Big]\Big\}\times$$

$$\times W_{(+)}\Big[J,\frac{\chi}{1+\bar{c}};\mathcal{L}_{\mathrm{eff}}\Big(\bar{b},0;\frac{u}{(1+\bar{c})^2}\Big)+e(u)\mathcal{N}_3{}^3[(\varphi^2)^3]_\otimes(x)\Big]+$$

$$+\tilde{c}_3(u)\int d^3x(\chi(x))^3,$$

где $\Big[\int d^3y\mathcal{N}_\delta{}^\rho[Q(\varphi,\sigma)](y)\Big]W_{(+)}$ означает однократную вставку соответствующего составного оператора в функциях Грина $\langle X_\varphi X_\sigma\rangle$, $\mathcal{N}_\delta{}^\rho[\{P(\varphi,\sigma)\}\sigma](x)$ — анизотропное нормальное произведение, уже появившееся в соотношениях предкиральности (1.17). Коэффициенты $\alpha_i(u)$, $i=1, 2, 3$, явно выражаются в терминах одночастично-неприводимых функций Грина и, следовательно, могут иметь не более чем логарифмические расходимости по u в пределе $u\to 0$. Последний контактный член в (5) возникает только в $\langle X_\sigma\rangle$ с $L_\sigma=3$ из-за наличия графиков типа

Рассмотрим произвольный граф $\Gamma^{(M)}$ правой части (5), содержащий M вставок типа $\int d^3y\mathcal{N}_3{}^3[\{(\varphi^2)^2\}\sigma]_\otimes(y)$, $\Delta_{\sigma\sigma}\equiv\int d^3y\mathcal{N}_3{}^3[\sigma^2]_\otimes(y)$ ($\Delta_{\sigma\sigma}$ возникают при разложении $u(1+\bar{c})^{-2}$ в σ-пропагаторах $G(p;\, m(s),\, sf^2;\, u(1+\bar{c})^{-2})$ (1.3б) по порядкам $1/N$). В критическом пределе каноническая ультрафиолетовая размерность σ-поля $\bar{d}_\sigma=2$ (ср. (1.7), [6]), отсюда $\bar{d}_{(\varphi^2)^2\sigma}=\bar{d}_{\sigma^2}=4$ и, следовательно, согласно (1.12) для обеспечения ультрафиолетовой сходимости (УФС) не хватает УФВ$[t^{\delta}_{p^\Gamma,s}{}^{(\Gamma^{(M)})+M}-t^{\delta}_{p^\Gamma,s}{}^{(\Gamma^{(M)})}]$. Их отсутствие приводит к поведению $\mathcal{R}_{\Gamma^{(M)}}=O(u^{-M+1}(\ln u)^z)$ (см. приложение). Однако, как явствует из (5), вместе с сопутствующими факторами Nu/μ

(6) $$(Nu/\mu)^M\mathcal{R}_{\Gamma^{(M)}}=O(u(\ln u)^z),$$

в результате чего (после применения соотношения (1.22) к $W_{(+)}$) в критическом пределе (в каждом порядке по $1/N$)

(7) $$W[J,\chi;\mathcal{L}_{\mathrm{eff}}(\bar{b},\bar{c};u)]=W_{(+)}\Big[J,\frac{\chi}{1+\bar{c}};\mathcal{L}_{\mathrm{eff}}\Big(b,0;\frac{u}{(1+c)^2}\Big)\Big]+$$

$$+O(u(\ln u)^z)+c_3(u)\int d^3x(\chi(x))^3,$$

где новые конечные контрчлены перенормировки φ-поля $b(u)$ и заряда $u-c(u)$ выражаются через $\bar{b}(u)$, $\bar{c}(u)$, $\alpha_1(u)$, $e(u)$. Таким образом, осталось доказать существование $\lim\limits_{u\to 0} b(u)$, $\lim\limits_{u\to 0} c(u)$.

Для двухточечной вершинной функции $\delta_{\alpha\beta}\mathscr{T}^{(2,0)}(p^2;\ \bar{b}(u),\ \bar{c}(u);\ u)$, удовлетворяющей нормировочному условию (1.21в), в качестве частного случая (7) получаем (r — порядок по $1/N$)

(8а) $$\mathscr{T}^{(2,0)}(p^2;\bar{b}(u),\bar{c}(u);u)=\mathscr{T}^{(2.0)}_{(+)}(p^2;b(u);u)+O(u(\ln u)^z),$$

(8б) $$b^{(r)}(u)=(1/\mu^2)\Pi^{(r)}_{(+)}(p^2;b(u);u)\,|_{p^2=\mu^2}+O(u(\ln u)^z),$$

где $\Pi_{(+)}=\mathscr{T}^{(2,0)}_{(+)}+p^2(1+b)$ — вклад недревесных диаграмм, а $\Pi^{(r)}_{(+)}$ содержит вставки $b^{(r')}\Delta_1$ порядка $r'<r$. Тогда из (8б) индукцией по порядкам $1/N$ следует, что существует $\lim\limits_{u\to 0} b(u)=b(0)$, $\Pi^{(1)}_{(+)}|_{u=0}$ в точности совпадает с соответствующим вкладом $\mathscr{T}^{(2,0)}_{(+)}$ для кирального поля,  ; причем из нормировочных условий (1.21) видно, что $b(0)$ равен конечному контрчлену перенормировки n-поля в критической точке [6].

Для вершинной функции $\mathscr{T}^{(2,1)}(p_1,p_2;\bar{b},\bar{c};u)$, удовлетворяющей нормировочному условию (1.21в), имеем

(9а) $$\mathscr{T}^{(2,1)}(p_1,p_2;\bar{b}(u),\bar{c}(u);u)=\mathscr{T}^{(2,1)}_{(+)}(p_1,p_2;b(u),c(u);u)+$$
$$+O(u(\ln u)^z),$$

(9б) $$c^{(r)}(u)=\Lambda^{(r)}_{(+)}(p_1,p_2;b(u),c(u);u)\,|_{p_1^2=p_2^2=p_1p_2=\mu^2}+O(u(\ln)^z),$$

где $\Lambda_{(+)}=\mathscr{T}^{(2,1)}_{(+)}+1+c(u)$ — сумма недревесных диаграмм, а $\Lambda^{(z)}_{(+)}$ содержит вставки $b^{(r')}\Delta_1$, $c^{(r'')}\Delta_2$ порядка $r'<r$, $r''<r$. Следовательно, как в случае $b(u)$, $\lim\limits_{u\to 0} c(u)=c(0)$ существует.

Это завершает доказательство существования критического предела и совпадение функций Грина $\langle X_\varphi X_\sigma\rangle$ предасимптотической безмассовой $(\varphi^2)_3{}^2$-теории и $\langle X_n X_\sigma\rangle$ киральной модели в критической точке. В частности, из (1.26) следует, что $\lim\limits_{u\to 0}\zeta_\varphi(u)=\zeta_\varphi(0)$, $\lim\limits_{u\to 0}\zeta_\sigma(u)=\zeta_\sigma(0)$ существуют и в точности совпадают с аномальными размерностями n- и σ-поля в критической точке. Критический показатель $\omega\equiv\beta'(0)=1+2\zeta_\sigma(0)>0$ (и конечен) (ср. (1.25в)), что подтверждает тот факт, что $u=0$ является инфракрасностабильной точкой.

Совершенно аналогично проводится доказательство существования предела сильной связи $u\to 0$ в функциях Грина $O(N)$ $(\varphi^2)_3{}^2$-модели в обеих фазах и их совпадения с функциями Грина кирального поля в соответствующих фазах, поскольку ультрафиолетовые индексы $\delta(\gamma)$ (1.12) в этих фазах, а также и в предасимптотической теории, одинаковы.

Из доказанного выше видно, что квантовая предкиральность $(\varphi^2)_3^2$-модели (1.17) отличается от настоящей квантовой киральности n-поля [6] на исчезающие в пределе $u\to 0$ члены типа $O(u(\ln u)^2)$. Тем самым убеждаемся в том, что квантовая киральность является фундаментальным свойством конформно-инвариантной (см. (1,29)) универсальной N-компонентной критической теории в трехмерном пространстве.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА

В этом разделе, как и в [1, раздел 3] стандартным методом дифференциальновершинных вставок [4] выведем уравнения РГ, КС и ГП для функций Грина в высоко- и низкотемпературной фазах $(\varphi^2)_3^2$-модели. Перенормированный принцип действия для $\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}$ (1) дает следующие уравнения (ср. 1.23а)):

(10а)
$$\left\{\mu\frac{\partial}{\partial\mu}-\mu\frac{\partial\bar a}{\partial\mu}\Delta_0-\mu\frac{\partial\bar b}{\partial\mu}\Delta_1-\mu\frac{\partial\bar c}{\partial\mu}\Delta_2+\frac{Nu}{2\mu}\Delta_{\sigma\sigma}-\right.$$
$$\left.-2\mu(\mu-m)\mathcal{Q}_4-2\mu m\mathcal{Q}_3\right\}\langle X_\varphi X_\sigma\rangle=0,$$

(10б)
$$\left\{u\frac{\partial}{\partial u}-u\frac{\partial\bar a}{\partial u}\Delta_0-u\frac{\partial\bar b}{\partial u}\Delta_1-u\frac{\partial\bar c}{\partial u}\Delta_2-\frac{Nu}{2\mu}\Delta_{\sigma\sigma}\right\}\langle X_\varphi X_\sigma\rangle=0,$$

(10в)
$$\left\{m\frac{\partial}{\partial m}-m\frac{\partial\bar a}{\partial m}\Delta_0-m\frac{\partial\bar b}{\partial m}\Delta_1-m\frac{\partial\bar c}{\partial m}\Delta_2+2m(\mu-m)\mathcal{Q}_4-\right.$$
$$\left.-2m(\mu-2m)\mathcal{Q}_3-2m^2\mathcal{Q}_1\right\}\langle X_\varphi X_\sigma\rangle=0,$$

(10г)
$$\left\{f^2\frac{\partial}{\partial f^2}-f^2\frac{\partial\bar b}{\partial f^2}\Delta_1-f^2\frac{\partial\bar c}{\partial f^2}\Delta_2+{}^1/{}_2(1+\bar c)f\Delta_3\right\}\langle X_\varphi X_\sigma\rangle=0,$$

где обозначения для вставок те же самые, что и в [1]:

$$\Delta_0\equiv(N/2)\int d^3x\sigma(x),\quad \Delta_1\equiv-{}^1/{}_2\int d^3x\mathcal{N}_3{}^3[(\partial_\mu\varphi)^2]_\otimes(x),$$
$$\Delta_2\equiv-\frac{1}{2}\int d^3x\mathcal{N}_3{}^3[\sigma(\varphi^2+2(\varphi,Fs^{1/2}))]_\otimes(x),$$
$$f\Delta_3\equiv\int d^3x\mathcal{N}_3{}^3[\sigma(F,Fs^{1/2})]_\otimes(x),$$
$$\mathcal{Q}_1\equiv-\frac{1}{2}\int d^3x\mathcal{N}_3{}^3[\varphi^2]_\otimes(x),$$
$$\mathcal{Q}_3\equiv-\frac{1}{2}\int d^3x\mathcal{N}_3{}^3[(1-s)\varphi^2]_\otimes(x),$$
$$\mathcal{Q}_4\equiv-\frac{1}{2}\int d^3x\mathcal{N}_3{}^3[(1-s)^2\varphi^2]_\otimes(x).$$

Билинейные квантовые уравнения движения имеют вид

(11)
$$\{(1+\bar b)\Delta_1+(m-\mu)^2\mathcal{Q}_4+2m(\mu-m)\mathcal{Q}_3+m^2\mathcal{Q}_1+$$
$$+(1+\bar c)\Delta_2+{}^1/{}_2(1+\bar c)f\Delta_3+{}^1/{}_2L_\varphi\}\langle X_\varphi X_\sigma\rangle=0.$$

Тождества Циммерманна [3, 5] и соотношения квантовой предкиральности (1.17) дают дополнительные линейные соотношения (1.23)—(1.25), (1.18)—(1.19) для вершинных вставок Δ_i, $i=0, 1, 2, 3$, и Q_j, $j=1, 3, 4$, (ср. предложение из [1]). После их подстановки в (10)—(11) в высокотемпературной фазе ($f=0$) получаем четыре уравнения (10а), (10б), (10в) и (11) для трех независимых вставок Δ_0, Δ_1, Δ_2 и аналогично в низкотемпературной фазе ($m=0$) — (10а), (10б), (10г) и (11) для Δ_1, Δ_2, Δ_3. В первом случае как следствие возникают уравнения РГ и КС:

$$(12)\qquad \left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\left(1+2\zeta_\sigma\left(\frac{m}{\mu},u\right)\right)u\frac{\partial}{\partial u}+L_\varphi\zeta_\varphi\left(\frac{m}{\mu},u\right)+\right.$$
$$\left.+L_\sigma\zeta_\sigma\left(\frac{m}{\mu},u\right)\right]\langle X_\varphi X_\sigma\rangle=0,$$

$$(13)\qquad \left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+m\frac{\partial}{\partial m}+\left(1+2\gamma_\sigma\left(\frac{m}{\mu},u\right)\right)u\frac{\partial}{\partial u}+L_\varphi\gamma_\varphi\left(\frac{m}{\mu},u\right)+\right.$$
$$\left.+L_\sigma\gamma_\sigma\left(\frac{m}{\mu},u\right)-m\alpha\left(\frac{m}{\mu},u\right)\Delta_0\right]\langle X_\varphi X_\sigma\rangle=0,$$

а во втором — уравнения РГ и ГП:

$$(12\text{а})\qquad \left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}-2\zeta_\sigma\left(\frac{f^2}{\mu},u\right)f^2\frac{\partial}{\partial f^2}+\left(1+2\zeta_\sigma\left(\frac{f^2}{\mu},u\right)\right)u\frac{\partial}{\partial u}+\right.$$
$$\left.+L_\varphi\zeta_\varphi\left(\frac{f^2}{\mu},u\right)+L_\sigma\zeta_\sigma\left(\frac{f^2}{\mu},u\right)\right]\langle X_\varphi X_\sigma\rangle=0,$$

$$(14)\qquad \left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+f^2\frac{\partial}{\partial f^2}+\left(1+2\gamma_\sigma\left(\frac{f^2}{\mu},u\right)\right)u\frac{\partial}{\partial u}+L_\varphi\gamma_\varphi\left(\frac{f^2}{\mu},u\right)+\right.$$
$$\left.+L_\sigma\gamma_\sigma\left(\frac{f^2}{\mu},u\right)+\left(\frac{1}{2}+\gamma_\varphi\left(\frac{f^2}{\mu},u\right)\right)\left(1+\bar{c}\left(\frac{f^2}{\mu},u\right)f\Delta_3\right)\right]\times$$
$$\times\langle X_\varphi X_\sigma\rangle=0.$$

Все коэффициентные функции в (12)—(14) явно выражаются через соответствующие коэффициенты в (10)—(11), в тождествах Циммерманна и в соотношениях предкиральности.

Введем следующие обозначения для преобразования Фурье функций Грина (1.8):

$$\delta(\Sigma p_i+\Sigma q_j+\Sigma k_a)\mathcal{G}^{(L_\varphi,L_\sigma;A)}(p_1,\ldots,p_{L_\varphi};q_1,\ldots,q_{L_\sigma};k_1,\ldots,k_a)\equiv$$
$$\equiv\mathcal{G}^{(L_\varphi,L_\sigma;A)}(\{p\};\{q\};\{k\})=$$
$$=\int\Pi dx_i'\Pi dx_j''\Pi dx_a\langle\Pi\mathcal{N}^{\rho_a}_{\delta_a}[P_a](x_a)X_\varphi X_\sigma\rangle\exp i\times$$
$$\times\{\Sigma x_i'p_i+\Sigma x_j''q_j+\Sigma x_a p_a\}.$$

Если в функцию Грина $\mathcal{T}^{(L_\varphi,L_\sigma)}$ вставлен оператор $\mathcal{N}_\delta{}^\rho[P](x)$, то будем пользоваться специальным обозначением:

$$\mathcal{T}^{(L_\varphi,L_\sigma;1)}(\{p\};\ \{q\};\ k)\equiv\mathcal{N}_\delta{}^\rho[P]\mathcal{T}^{(L_\varphi,L_\sigma)}(\{p\};\ \{q\};\ k).$$

Более простые выражения для аномальных размерностей φ- и σ-полей, ζ_φ и ζ_σ, а также для функций γ_φ, γ_σ, α получаются после подстановки нормировочных условий (1.21а), (1.21б) в (12)—(14):

$$(15)\qquad \zeta_\varphi\left(\frac{m}{\mu},\ u\right)=\mu^2(\mu^2+m^2)^{-1}\left(1+\frac{\partial}{\partial p^2}\mathscr{T}^{(2,0)}\Big|_{p^2=\mu^2}\right),$$

$$2\zeta_\varphi\left(\frac{m}{\mu},u\right)+\zeta_\sigma\left(\frac{m}{\mu},u\right)=2\mu^2\left(\frac{\partial}{\partial\mu^2}\mathscr{T}^{(2,1)}\Big|_{s\cdot p\cdot\mu^2}\right),$$

$$m\alpha\left(\frac{m}{\mu},\ u\right)=2m^2\left(\frac{\partial}{\partial p^2}\mathscr{T}^{(2,0)}\Big|_{p^2=-m^2}\right)[\Delta_0\mathscr{T}^{(2,0)}|_{p^2=-m^2}]^{-1},$$

$$\gamma_\varphi\left(\frac{m}{\mu},\ u\right)=\zeta_\varphi\left(\frac{m}{\mu},\ u\right)+\frac{m^2}{m^2+\mu^2}+$$

$$+\frac{m}{2(m^2+\mu^2)}\alpha\left(\frac{m}{\mu},\ u\right)[\Delta_0\mathscr{T}^{(2,0)}|_{p^2=\mu^2}],$$

$$2\left(\zeta_\varphi\left(\frac{m}{\mu},\ u\right)-\gamma_\varphi\left(\frac{m}{\mu},\ u\right)\right)+\zeta_\sigma\left(\frac{m}{\mu},\ u\right)-\gamma_\sigma\left(\frac{m}{\mu},\ u\right)=$$

$$=m\alpha\left(\frac{m}{\mu},\ u\right)[\Delta_0\mathscr{T}^{(2,1)}|_{s.p.\mu^2}],$$

$$\zeta_\varphi\left(\frac{f^2}{\mu},\ u\right)=1+\frac{\partial}{\partial p^2}\mathscr{T}_\perp^{(2,0)}\Big|_{p^2=\mu^2},$$

$$2\zeta_\varphi\left(\frac{f^2}{\mu},u\right)+\zeta_\sigma\left(\frac{f^2}{\mu},u\right)=2\mu^2\left(\frac{\partial}{\partial\mu^2}\mathscr{T}_\perp^{(2,1)}\Big|_{s\cdot p\cdot\mu^2}\right),$$

$$\gamma_\varphi\left(\frac{f^2}{\mu},u\right)=\zeta_\varphi\left(\frac{f^2}{\mu},u\right)-\frac{f}{2\mu^2}\left(\frac{1}{\mu}+\gamma_\varphi\left(\frac{f^2}{\mu},u\right)\right)\times$$

$$\times\left(1+\bar{c}\left(\frac{f^2}{\mu}\ u\right)\right)[\Delta_3\mathscr{T}^{(2,0)}|_{p^2=\mu^2}],$$

$$2\left(\zeta_\varphi\left(\frac{f^2}{\mu},\ u\right)-\gamma_\varphi\left(\frac{f^2}{\mu},\ u\right)\right)+\zeta_\sigma\left(\frac{f^2}{\mu}\right)-\gamma_\sigma\left(\frac{f^2}{\mu},\ u\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\gamma_\varphi\left(\frac{f^2}{\mu},u\right)\right)\left(1+\bar{c}\left(\frac{f^2}{\mu},u\right)\right)[f\Delta_3\mathscr{T}^{(2,1)}|_{s\cdot p\cdot\mu^2}].$$

Для оценки поведения коэффициентных функций (15) в пределе $m\to 0$ представим $\Delta_0\mathscr{T}^{(2,0)}$, $\Delta\mathscr{T}^{(2,1)}$ в виде

$$(16)\qquad \Delta_0\mathscr{T}^{(2,0)}(p,-p)=\frac{N}{2}\mathscr{G}^{(0,2)}(q,-q)|_{q=0}\mathscr{T}^{(2,1)}(p,-p;0),$$

$$\Delta_0\mathscr{T}^{(2,1)}(p_1,p_2;p_1+p_2)=\frac{N}{2}\mathscr{G}^{(0,2)}(q,-q)|_{q=0}\times$$

$$\times\mathscr{G}^{(2.2)}_{\mathrm{Amp}}(p_1,p_2;q',-q')|_{q'=0},$$

где индекс «Amp» в связной функции Грина $\mathscr{G}^{(2,2)}$ обозначает ампутацию полных пропагаторов во внешних линиях. Согласно обобщенной теореме Вайнберга об асимптотическом поведении диаграмм [7] при больших внешних импульсах и μ (см. приложение) имеет место следующее поведение вершинных функций, через которые выражаются коэффициентные функции (15) в пределе $m\to 0$ в каждом порядке по $1/N$:

$$(17)\qquad \frac{\partial}{\partial p^2}\mathscr{T}^{(2,0)}(p,-p;\varepsilon m,\mu;u)=$$

$$= \frac{\partial}{\partial (p^2/\varepsilon^2)} \mathcal{T}^{(2,0)} \left(\frac{p}{\varepsilon}, -\frac{p}{\varepsilon}; m, \frac{\mu}{\varepsilon}; u \right) = O((\ln \varepsilon)^z),$$

$$\mathcal{T}^{(0,2)}(0, \varepsilon m, \mu; u) = \varepsilon^{-1} \mathcal{T}^{(0,2)} \left(0, m, \frac{\mu}{\varepsilon}; u \right) = O(\varepsilon^{-1} (\ln \varepsilon)^z),$$

$$\mathcal{T}^{(2,1)}(p, -p; 0; \varepsilon m, \mu; u) =$$

$$= \mathcal{T}^{(2,1)} \left(\frac{p}{\varepsilon}, -\frac{p}{\varepsilon}; 0; m, \frac{\mu}{\varepsilon}; u \right) = O(\varepsilon^{-1} (\ln \varepsilon)^z),$$

$$\mathcal{T}^{(2,2)}(p_1, p_2; p_1+p_2; 0; \varepsilon m, \mu, u) = (1/\varepsilon^2) \mathcal{T}^{(2,2)}(p_1/\varepsilon, p_2/\varepsilon;$$

$$(p_1+p_2)/\varepsilon, 0; m, \mu/\varepsilon; u) = O(\varepsilon^{-1} (\ln \varepsilon)^z).$$

В силу (16)–(17) из (15) получаем

$$\zeta_\varphi \left(\frac{m}{\mu}, u \right) - \gamma_\varphi \left(\frac{m}{\mu}, u \right) = O \left(m \left(\ln \frac{m}{\mu} \right)^z \right),$$

$$\zeta_\sigma \left(\frac{m}{\mu}, u \right) - \gamma_\sigma \left(\frac{m}{\mu}, u \right) = O \left(m \left(\ln \frac{m}{\mu} \right)^z \right), \tag{18}$$

$$m\alpha \left(\frac{m}{\mu}, u \right) = O \left(m \left(\ln \frac{m}{\mu} \right)^z \right).$$

Соотношения, аналогичные (18), в голдстоуновской фазе доказываются тем же самым способом. Из (18) следует, что все уравнения (12)–(14) в пределе $m \to 0$, соответственно $f \to 0$, совпадают друг с другом и с уже выведенными уравнениями РГ (1.24) в предасимптотической теории.

4. СВЕРХПЕРЕНОРМИРУЕМЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ПРЕДАСИМПТОТИЧЕСКОЙ И КРИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИЙ

Стандартная техника теоретико-полевого подхода к критическим явлениям основывается, как известно, на дифференциальных уравнениях в частных производных для функций Грина [8–10]. В частности, решение уравнений РГ (1.24) в предасимптотической $(\varphi^2)_3{}^2$-теории по методу характеристик принимает известную форму глобального закона скэйлинга:

$$\mathcal{T}^{(L_\varphi, L_\sigma)}(\{\varkappa p\}, \{\varkappa q\}; \mu; u) = \varkappa^{3 - L_\varphi(1/2 + \zeta_\varphi(0)) - L_\sigma(2 + \zeta_\sigma(0))} \times$$

$$\times \exp \left\{ -L_\varphi \int_u^{\bar{u}(\varkappa)} \frac{dy}{y} \frac{\zeta_\varphi(y) - \zeta_\varphi(0)}{1 + 2\zeta_\sigma(y)} - L_\sigma \int_u^{\bar{u}(\varkappa)} \frac{dy}{y} \frac{\zeta_\sigma(y) - \zeta_\sigma(0)}{1 + 2\zeta_\sigma(y)} \right\} \times$$

$$\times \mathcal{T}^{(L_\varphi, L_\sigma)}(\{p\}, \{q\}; \mu; \bar{u}(\varkappa)); \qquad \ln \varkappa = \int_u^{\bar{u}(\varkappa)} \frac{dy}{y(1 + 2\zeta_\sigma(y))},$$

откуда критический показатель $\eta = 2\zeta_\varphi(0)$. Вычисление η согласно выражению (1.34) в главном порядке по $1/N$ дает ответ $\eta^{(1)} = (1/N)(8/3\pi^2)$, в точности совпадающий с соответствующим результатом для N-компонентной модели Гейзенберга на решетке [11].

Важной отличительной чертой подхода, основанного на БПХЦЛ-формализме нормальных произведений [8], является тот факт, что в качестве независимых параметров теории задаются физическая масса m и физическая спонтанная намагниченность f (см. (1.21а), (1.21б)) вместо температуры, точнее $t=(T-T_c)T_c^{-1}$. Поэтому для получения всех законов скэйлинга и соотношения универсальности для критических показателей необходимо ввести «температурно-магнитное» возмущение (2) к $\mathscr{L}_{\text{eff}}$ предасимптотической (или критической) теории. В этом пункте построим хорошо определенное $1/N$-разложение возмущенной теории, свободное от ИКР в каждой отдельной диаграмме.

Сначала для строгости рассмотрим «температурно-магнитное» возмущение высокотемпературной фазы ($m\neq 0$, $f=0$ в (1)):

$$(19)\qquad \mathscr{L}_{\text{eff}}(x;\bar{a},\bar{b},\bar{c};u)-(N/2)\mu t\sigma(x)+(H,\varphi(x)).$$

Как обычно, сделаем сдвиг $\varphi(x)=\bar{\varphi}(x)-\bar{F}$ ($\bar{F}^2\equiv N\bar{f}^2$, $\bar{F}=\langle\varphi(x)\rangle_{H,t}$ — полное вакуумное среднее в присутствии вставок (2)):

$$(19\text{а})\qquad \mathscr{L}_{\text{eff}}(x;\bar{a},\bar{b},\bar{c};u,t,\bar{f})=-{}^1/_2\left(1+\bar{b}\left(\frac{m}{\mu},\ u\right)\right)\mathscr{N}_3{}^3[(\partial_\mu\bar{\varphi})^2]_\otimes(x)-$$
$$-{}^1/_2\mathscr{N}_3{}^3[m(s)^2(\bar{\varphi}^2+2(\bar{\varphi},\bar{F}s^{1/2}))]_\otimes^*(x)+(N/2)\mathscr{N}_3{}^3[\sigma(G_u{}^{-1}(\sigma)]_\otimes(x)-$$
$$-{}^1/_2\mathscr{N}_3{}^3[\sigma(\bar{\varphi}^2+2(\bar{\varphi},\bar{F}s^{1/2}))]_\otimes^*(x)+(N/2)(\bar{a}(m,\mu,u)-\mu t-\bar{f}^2)\sigma(x)-$$
$$-{}^1/_2\bar{c}\left(\frac{m}{\mu},\ u\right)\mathscr{N}_3{}^3[\sigma(\bar{\varphi}^2+2(\bar{\varphi},\bar{F}s^{1/2}))]_\otimes(x)+(H,\bar{\varphi}(x)),$$

где независимым параметром уже является $\bar{f}$ вместо H, а функция $H=H(m,\ \mu,\ t,\ u,\ \bar{f})$ (уравнение состояния) определяется рекуррентно по порядкам $1/N$ из условия отсутствия $\bar{\varphi}$-головастиков: $H-m^2\bar{F}+\langle\bar{\varphi}\rangle^{1\text{ЧН}}=0$ (1ЧН — одночастично-неприводимый).

Частичное пересуммирование (2), не меняющее порядки по $1/N$ диаграмм функций Грина $\langle X_\varphi\rangle$ теории (19а), описывается эквивалентно с помощью следующего эффективного лагранжиана:

$$(20)\qquad \hat{\mathscr{L}}_{\text{eff}}(x;\hat{a},\hat{b},\hat{c};u,t,\bar{f})=-{}^1/_2\left(1+\hat{b}\left(\frac{m}{\mu},u,t,\frac{\bar{f}^2}{\mu}\right)\right)\mathscr{N}_3{}^3[(\partial_\mu\bar{\varphi})^2]_\otimes(x)-$$
$$-{}^1/_2\mathscr{N}_3{}^3[(m(t,\bar{f};s))^2(\bar{\varphi}^2+2(\bar{\varphi},\bar{F}s^{1/2}))]_\otimes^*(x)+$$
$$+(N/2)\mathscr{N}_3{}^3[\sigma(\hat{G}_u{}^{-1}\sigma)]_\otimes(x)-{}^1/_2\mathscr{N}_3{}^3[\sigma(\bar{\varphi}^2+2(\bar{\varphi},\bar{F}s^{1/2}))]_\otimes^*(x)+$$
$$+(N/2)\hat{a}(m,\mu,u,t,\bar{f})\sigma(x)-$$
$$-{}^1/_2\hat{c}\left(\frac{m}{\mu},u,t,\frac{\bar{f}^2}{\mu}\right)\mathscr{N}_3{}^3[\sigma(\bar{\varphi}^2+2(\bar{\varphi},\bar{F}s^{1/2}))]_\otimes(x),$$

$$(21)\qquad m(t,\ \bar{f};\ s)=m(s)+4\pi s(\mu t+\bar{f}^2)\equiv m(s)+s\hat{m}(t,\ \bar{f}),$$
$$\hat{G}_u\equiv G(p;\ m(t,\bar{f};s),\ s\bar{f}^2;u),$$

где новые конечные контрчлены $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ явно выражаются (в рамках $1/N$-разложения) в терминах старых $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Доказательство эквивалентности (20) и (19а) основывается на разложении второго и третьего членов в правой части (20) на два слагаемых в соответствии с (21). Тогда второе слагаемое

$$\hat{m}(t, \tilde{f})(\hat{m}(t, \tilde{f})+2m-2\mu)\mathcal{N}_{s^3}[(1-s)^2(\bar{\varphi}^2+2(\bar{\varphi}, \tilde{F}s^{1/2}))]_\otimes^* -$$

$$-2\hat{m}(t, \tilde{f})(\hat{m}(t, \tilde{f})+2m-\mu)\mathcal{N}_{s^3}[(1-s)(\bar{\varphi}^2+2(\bar{\varphi}, \tilde{F}s^{1/2}))]_\otimes^* +$$

$$+\hat{m}(t, \tilde{f})(2m+\hat{m}(t, \tilde{f}))\mathcal{N}_{s^3}[\bar{\varphi}^2+2(\bar{\varphi}, F)s^{1/2}]_\otimes^*$$

в соответствии с предложением [1, раздел 2] и тождеством Уорда — Такахаши для нарушенной $O(N)$ симметрии сводится к линейной комбинации $\sigma(x)$, $\mathcal{N}_{s^3}[(\partial_\mu\varphi)^2]_\otimes(x)$, $\mathcal{N}_{s^3}[\sigma(\bar{\varphi}^2+2(\varphi, F)s^{1/2}))]_\otimes(x)$.

В общем случае функций Грина $\langle X_\varphi X_\sigma\rangle$ возникает дополнительная конечная перенормировка внешних σ-линий (ср. (1.22), (1.23)г)):

$$W[J, \chi; \mathcal{L}_{\text{eff}}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}; u)-N\mu t\sigma/2+(H, \varphi)] =$$

$$=W[J, [1+\hat{\rho})^{-1}\chi; \hat{\mathcal{L}}_{\text{eff}}(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}; u, t, \tilde{f})].$$

Таким образом, осталось показать, что $\lim\limits_{m\to 0} \hat{a}$, $\lim\limits_{m\to 0} \hat{b}$, $\lim\limits_{m\to 0} \hat{c}$ и $\lim\limits_{m\to 0} \hat{\rho}$ существуют. Для этого воспользуемся уравнениями РГ и КС, которым удовлетворяют вершинные функции Грина теории (19) или (20):

(22а)
$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}-\left(1-\zeta_\sigma\left(\frac{m}{\mu}, u\right)\right)t\frac{\partial}{\partial t}-\zeta_\varphi\left(\frac{m}{\mu}, u\right)\left(L_\varphi+2\tilde{f}^2\frac{\partial}{\partial \tilde{f}^2}\right)-\right.$$
$$\left.-\zeta_\sigma\left(\frac{m}{\mu}, u\right)L_\sigma+\left(1+2\zeta_\sigma\left(\frac{m}{\mu}, u\right)\right)u\frac{\partial}{\partial u}\right]\times$$
$$\times\mathcal{T}^{(L_\varphi, L_\sigma)}(\{p\}; \{q\}; m, \mu, u, t, \tilde{f}^2)=0,$$

(22б)
$$\left\{\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+m\frac{\partial}{\partial m}+\left(1+2\zeta_\sigma\left(\frac{m}{\mu}, u\right)\right)u\frac{\partial}{\partial u}-\right.$$
$$-\left[1-\gamma_\sigma\left(\frac{m}{\mu}, u\right)+\frac{m}{\mu t}\alpha\left(\frac{m}{\mu}, u\right)\right]t\frac{\partial}{\partial t}-\gamma_\varphi\left(\frac{m}{\mu}, u\right)\left(L_\varphi+2\tilde{f}^2\frac{\partial}{\partial \tilde{f}^2}\right)-$$
$$\left.-\gamma_\sigma\left(\frac{m}{\mu}, u\right)L_\sigma\right\}\mathcal{T}^{L(\varphi, L_\sigma)}(\{p\}; \{q\}; m, \mu, u, t, \tilde{f}^2)=0.$$

(22а), (22б) непосредственно получаются из (19) и (12)—(13). Нам понадобится только разность (22а) и (22б) для $\mathcal{T}^{(2,0)}$ и $\mathcal{T}^{(2,1)}$:

(23а)
$$\left(\frac{m\partial}{\partial m}-\frac{m}{4\pi\mu}\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathcal{T}^{(L_\varphi, L_\sigma)}(\{p\}; \{q\}; m, \mu, u, t, \tilde{f}^2)=$$
$$=\left\{\left[\zeta_\sigma\left(\frac{m}{\mu}, u\right)-\gamma_\sigma\left(\frac{m}{\mu}, u\right)\right]\left(t\frac{\partial}{\partial t}-L_\sigma+2u\frac{\partial}{\partial u}\right)+\right.$$
$$+\frac{m}{\mu}\alpha'\left(\frac{m}{\mu}, u\right)\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{2}L_\varphi\left[\zeta_\varphi\left(\frac{m}{\mu}, u\right)-\gamma_\varphi\left(\frac{m}{\mu}, u\right)\right]\times$$
$$\left.\times\left(1+\tilde{f}^2\frac{\partial}{\partial \tilde{f}^2}\right)\right\}\mathcal{T}^{L_\varphi, L_\sigma}(\{p\}; \{q\}; m, \mu, u, t, \tilde{f}^2),$$

(23б)
$$\mathcal{T}^{(2,0)}(p, -p; m, \mu, u, t, \tilde{f}^2)=-p^2-m^2(t, \tilde{f}; 1)-$$
$$-\hat{b}\left(\frac{m}{\mu}, u, t, \frac{\tilde{f}^2}{\mu}\right)p^2+8\pi m(t, \tilde{f}; 1)(1+16\pi m\times$$

$$\times(t,\bar f;1)/\mu)^{-1}\hat a(m,\mu,u,t,\bar f)+\Pi(p^2;\hat a,\hat b,\hat c,u,t,\bar f^2),$$

(23в) $$\mathcal{T}^{(2,1)}\left(p_1,p_2;\sum p_i;m,\mu,u,t,\bar f^2\right)=\left\{-1-\hat c\left(\frac{m}{\mu},u,t,\frac{\bar f^2}{\mu}\right)+\right.$$
$$\left.+\Lambda^{(2,1)}(p_1,p_2;m,\mu,u,t,\bar f^2)\right\}\left[1+\hat\rho\left(\frac{m}{\mu},u,t,\frac{\bar f^2}{\mu}\right)\right].$$

Члены нулевого порядка по $1/N$ функции $\alpha(m/\mu,\ u)\equiv\alpha^{(0)}(m/\mu,\ u)+$ $+\alpha'(m/\mu,\ u)$, $\alpha^{(0)}=1/4\pi$, в (23а) переброшены в левую сторону. Заметим, что все коэффициентные функции в правой части (23а) имеют главный порядок $O(1/N)$ (см. (15)) и поведение $O(m(\ln m/\mu)^z)$ в пределе $m\to 0$ (см. (18)). В данном порядке r по $1/N$ в (23б), (23в) Π и Λ содержат $\hat a$, $\hat b$, $\hat c$ порядка $r'<r$. Те же самые свойства остаются в силе для любых производных $(\partial/\partial t)^{n_1}(\partial/\partial\bar f^2)^{n_2}(\partial/\partial u)^{n_3}$ от $\mathcal{T}^{(2,0)}$ и $\mathcal{T}^{(2,1)}$ в уравнениях (23).

Тогда искомое утверждение об $\lim\limits_{m\to 0}\hat a$, $\lim\limits_{m\to 0}\hat b$, $\lim\limits_{m\to 0}\hat c$, $\lim\limits_{m\to 0}\hat\rho$ следует индукцией по порядкам $1/N$, после подстановки (23б), (23в) в (23а).

Действительно, рассмотрим (23а) для $L_\varphi=2$, $L_\sigma=0$ в порядке r при $p=0$:

(24) $$8\pi m\left(\frac{\partial}{\partial m}-\frac{1}{4\pi\mu}\frac{\partial}{\partial t}\right)[(m+4\pi\mu t+4\pi\bar f^2)\hat a^{(r)}]=$$
$$=m\mathcal{F}_r(m,\mu,u,t,\bar f^2),$$

где в силу индукционного предположения $\mathcal{F}_r=O((\ln m/\mu)^z)$ при $m\to 0$ равномерно относительно остальных переменных. После замены переменных $y=4\pi(\mu t+\bar f^2)$ и элементарных преобразований (24) приводится к виду $(\hat{\mathcal{F}}_r(m,y)\equiv\mathcal{F}_r(m,\ \mu,\ u,\ (y-4\pi\bar f^2)(4\pi\mu)^{-1},\ \bar f^2))$:

(25) $$\left(\frac{\partial}{\partial m}-\frac{\partial}{\partial y}\right)\hat a^{(r)}=\frac{1+16\pi u(m+y)/\mu}{8\pi(m+y)}\hat{\mathcal{F}}_r(m,y),$$
$$\hat a^{(r)}|_{y=0}=m\tilde a^{(r)}\left(\frac{m}{\mu},u\right),$$

где $m\tilde a(m/\mu,\ u)=\bar a(m,\ \mu,\ u)$ — обычный контрчлен в $\mathcal{L}_{\rm eff}$ (1). Стандартное решение задачи Коши для (25) по методу характеристик имеет вид

(26) $$\hat a^{(r)}(m,y)=m\tilde a^{(r)}(m/\mu,u)-$$
$$-\frac{1+16\pi u(m+y)/\mu}{8\pi(m+y)}\int\limits_0^y dy'\hat{\mathcal{F}}_r(m+y',y-y'),$$

и, в частности, при $m=0$

(26а) $$\hat a^{(r)}(0,y)=-\frac{1+16\pi y/\mu}{8\pi y}\int\limits_0^y dy'\hat{\mathcal{F}}_r(y',y-y'),$$

причем интеграл в (26) сходится на нижнем пределе, поскольку $\hat{\mathcal{F}}_r(y',y-y')=O((\ln m/\mu)^z)$ при $y'\to 0$.

Аналогично, взяв производную $\partial/\partial p^2$ от обеих сторон (23а), (23б) $L_\varphi=2$, $L_\sigma=0$ и полагая $p^2=\mu^2$, получим для $\hat{b}^{(r)}$

$$(27)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial m}-\frac{\partial}{\partial y}\right)\hat{b}^{(r)}=G_r(m,y),\quad \hat{b}^{(r)}|_{y=0}=b^{(r)}\left(\frac{m}{\mu},u\right),$$

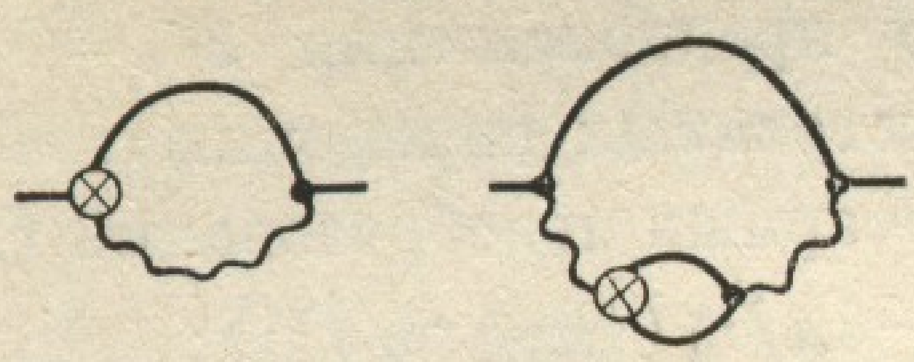
где $G_r(m, y)=O((\ln m/\mu)^z)$ равномерно относительно остальных переменных μ, u, t, $\bar{f}^2$ при $m\to 0$, откуда при $m=0$

$$\hat{b}^{(r)}(0,y)=b^{(r)}(u)-\int_0^y dy' G_r(y', y-y')<\infty.$$

Теперь рассмотрим вторую производную $\partial^2/\partial(p^2)^2$ от обеих сторон (23а), (23б) ($L_\varphi=2$, $L_\sigma=0$) в $r+1$-м порядке по $1/N$ и при $p^2=\mu^2$. Имеем

$$(28)\qquad \frac{\partial^2}{\partial(p^2)^2}\Pi^{(r+1)}(p^2;\hat{a},\hat{b},\hat{c};u,t,\bar{f}^2)|_{p^2=\mu^2}=(1/N)g(m+y)\hat{c}^{(r)}+$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial(p^2)^2}\Pi'^{(r+1)}(p^2;\hat{a},\hat{b},\hat{c};u,t,\bar{f}^2)|_{p^2=\mu^2},$$
$$g(m+y)=-2\frac{u}{\mu}\left[\frac{\partial^2}{\partial(p^2)^2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\mathscr{D}(p-k;m+y)\times\right.$$
$$\left.\times G^2(k;\ m+y,\bar{f}^2;u)\right]_{p^2=\mu^2},$$

где первый член в правой части (28) есть вклад графиков



а второй член содержит контрчлены $\hat{a}^{(r')}$, $\hat{b}^{(r')}$ порядка $r'\leqslant r$ и $\hat{c}^{(r'')}$ порядка $r''\leqslant r-1$. Тогда для $\hat{c}^{(r)}$ получаем частное дифференциальное уравнение с начальным условием того же самого вида, что и (25), (27), откуда следует конечность $\lim\limits_{m\to 0}\hat{c}^{(r)}$.

Совершенно аналогично с помощью (23а), (23б) при $L_\varphi=2$, $L_\sigma=1$ доказывается существование предела $\lim\limits_{m\to 0}\hat{\rho}$.

Таким образом, $\mathscr{L}_{\text{eff}}$ (20) порождает при $m=0$ хорошо определенное $1/N$-разложение «температурно-магнитного» возмущения предасимптотической $(\varphi^2)_3{}^2$-теории, свободное от ИКР в каждой отдельной диаграмме. Существование предела $u\to 0$ в функциях Грина теории (20) доказывается методом, описанным в разделе 2.

В частности, физическая масса $m_{\text{phys}}(\mu, t)$ теории (2) при $m=0$, $u=0$, $\bar{f}^2=0$ удовлетворяет уравнению РГ:

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}-(1-\zeta_\sigma(0))t\frac{\partial}{\partial t}\right]m_{\text{phys}}(\mu,t)=0,$$

имеющему решение $m_{\text{phys}}(\mu, t)=\text{const}\cdot\mu t^{1/(1-\zeta_\sigma(0))}$, откуда получаем второй независимый критический показатель: $\nu=(1-\xi_\sigma(0))^{-1}$.

Совершенно аналогично можно рассмотреть температурное возмущение ($H=0$) голдстоуновской фазы, т. е. температурные отклонения от предасимптотической (или критической) теории снизу (при $f^2\to 0$). Соответствующий эквивалентный $\hat{\mathscr{L}}'_{\rm eff}$, описывающий частичное пересуммирование вставки $\mu t(N/2)\sigma(x)$ ($t>0$, ст. (2)), имеет вид (20), но с другими контрчленами $\hat{a}'(\mu, f^2, u, t)$, $\hat{b}'(f^2/\mu, u, t)$, $\hat{c}'(f^2/\mu, u, t)$ (здесь f уже не является физическим параметром при $t\neq 0$). Доказательство существования $\lim\limits_{f\to 0}\hat{a}'$, $\lim\limits_{f\to 0}\hat{b}'$, $\lim\limits_{f\to 0}\hat{c}'$ основывается на разности уравнений ГП и РГ (ср. (12а)−(14)):

$$
\begin{aligned}
(29)\qquad & \Big[\Big(1+2\zeta_\varphi\Big(\frac{f^2}{\mu},u\Big)\Big]f^2\frac{\partial}{\partial f^2}-\Big[\zeta_\sigma\Big(\frac{f^2}{\mu},u\Big)-\gamma_\sigma\Big(\frac{f^2}{\mu},u\Big)\Big]t\frac{\partial}{\partial t}+\\
&+L_\varphi\Big[\zeta_\varphi\Big(\frac{f^2}{\mu},u\Big)-\gamma_\varphi\Big(\frac{f^2}{\mu},u\Big)\Big]+\\
&+\Big[\zeta_\sigma\Big(\frac{f^2}{\mu},u\Big)-\gamma_\sigma\Big(\frac{f^2}{\mu},u\Big)\Big]\Big(L_\sigma-2u\frac{\partial}{\partial u}\Big)-\\
&-{}^1\!/_2\Big(1+\gamma_\varphi\Big(\frac{f^2}{\mu},u\Big)\Big)\Big(1+\bar{c}\Big(\frac{f^2}{\mu},u\Big)\Big)f\Delta_3\Big\}\times\\
&\times\mathscr{T}^{(L_\varphi,L_\sigma)}(\{p\},\{q\};f^2,\mu,u,t)=0.
\end{aligned}
$$

Все коэффициентные функции в (29) имеют главный порядок $O(1/N)$ (см. (15)) и поведение $O(f(\ln f^2/\mu)^z)$ в пределе $f\to 0$. Критический показатель β возникает в решении уравнения РГ, которому удовлетворяет физическая намагниченность при $f=0$, $u=0$ ($F_{\rm phys}=\langle\varphi\rangle$, $F^2_{\rm phys}\equiv Nf^2_{\rm phys}$):

$$
\Big[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}-(1-\zeta_\sigma(0))t\frac{\partial}{\partial t}+\zeta_\varphi(0)\Big]f_{\rm phys}(\mu,t)=0,
$$

$$
f_{\rm phys}(\mu,t)={\rm const}\cdot\mu^{1/2}t^\beta,\qquad \beta=({}^1\!/_2+\zeta_\varphi(0))(1-\zeta_\sigma(0))^{-1}\equiv{}^1\!/_2\nu(1+\eta).
$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь приводится схема доказательства следующих вспомогательных утверждений, используемых в разделах 2 и 3 основного текста:

(30а) $\qquad \mathscr{R}^{(+)}_{\Gamma^{(M)}_{(L_\varphi,L_\sigma)}}=O(u^{-M+1}(\ln u)^z)$,

(30б) $\qquad \mathscr{R}_{\gamma(6,0)}=O((\ln u)^z)$,

(30в) $\qquad \mathscr{R}_{\Gamma_{(L_\varphi,L_\sigma)}}(\{p\},\ \{q\};\ m,\ \mu/\varepsilon;\ u)=O((\ln\varepsilon)^z)$,

(30г) $\qquad \mathscr{R}_{\Gamma_{(L_\varphi,L_\sigma)}}(\{p',\ p''/\varepsilon\},\ \{q',\ q''/\varepsilon\};\ m,\ \mu/\varepsilon;\ u)=O(\varepsilon^{-\delta''(\Gamma)}(\ln\varepsilon)^z)$,

$$
\delta''(\Gamma)\equiv 2-{}^1\!/_2L_\varphi''-2L_\sigma'',\quad L_\varphi'+L_\varphi''=L_\varphi(\Gamma),\quad L_\sigma'+L_\sigma''=L_\sigma(\Gamma).
$$

Рассмотрим, например, (30а), которое согласно известному правилу [7, п. III, уравнение (12)] эквивалентно неравенству ($\lambda_0=u^{-1}$)

(31) $\qquad \max\limits_H\{\overline{\deg}_{w^\Gamma,\lambda_0}\overset{(+)}{R}_{\Gamma^{(M)}}+\dim H\}\leqslant M-1,$

где H – произвольная гиперплоскость в пространстве внутренних импульсов $\{k^\Gamma\}$, определяемая в подходящей параметризации $k^\Gamma=k^\Gamma(\{w\},\{v\};\{p^\Gamma\},\{q^\Gamma\})$ как $v_j=\text{const}$, $v_j\in\{v\}$ (как и в (1.11), $\mathcal{R}_\Gamma(\{p^\Gamma\},\{q^\Gamma\})=\int\prod d^3k^\Gamma(2\pi)^{-3}\mathcal{R}_\Gamma(\{p^\Gamma\},\{q^\Gamma\};\{k^\Gamma\})$), а $\overline{\deg}_{\{x\}}f(\{x\},\{y\})$ обозначает степень асимптотического поведения функции $f(\{x\},\{y\})$ при больших значениях переменных $\{x\}$ (см. [12]). Заметим, что (31) тесно связано с критерием УФС [13] для $\overset{(+)}{\mathcal{R}}_{\Gamma(M)}$:

$$\max_H\{\overline{\deg}_{w^\Gamma}\overset{(+)}{\mathcal{R}}_{\Gamma(M)}+\dim H\}<0. \tag{32}$$

Доказательство (31), как и в случае (32) (см. [13, 14], а в контексте $1/N$-разложения – [6]), основывается на разложении $\overset{(+)}{\mathcal{R}}_{\Gamma(M)}$ в сумме по лесам U_H, полным относительно H (см. [13] о подробных определениях):

$$\overset{(+)}{\mathcal{R}}_{\Gamma(M)}=\sum_{U_H}\overset{(+)}{\mathcal{R}}_{\Gamma(M)}(U_H),\quad \overset{(+)}{\mathcal{R}}_{\Gamma(M)}(U_H)=(1-\tau_{\Gamma(M)})\,Y_{\Gamma(M)}(U_H). \tag{33}$$

$Y_\gamma(U_H)$, $\gamma\subseteq\Gamma^{(M)}$ определяются рекуррентно по формуле

$$Y_\gamma(U_H)=I_{\bar\gamma(U_H)}\prod_\alpha f_{\gamma_\alpha}Y_{\gamma_\alpha}(U_H),\ f_{\gamma_\alpha}=\begin{cases}1-\tau_{\gamma_\alpha}, & \bar\gamma_\alpha(U_H)\parallel H,\ \bar\gamma_\alpha(U_H)\not\parallel H,\\ -\tau_{\gamma_\alpha} & \text{в остальных случаях,}\end{cases} \tag{34}$$

где $\bar\gamma(U_H)=\gamma/\{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}$ – редуцированная диаграмма $\{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}$ – множество нетривиальных одночастично-неприводимых поддиаграмм $\gamma_i\subset\gamma$ и γ_i – максимальные в U_H, а $\bar\gamma(U_H)\not\parallel H$, соответственно $\bar\gamma(U_H)\parallel H$, означает, что $\bar\gamma(U_H)$ – постоянная, соответственно переменная, (под) диаграмма относительно H (см. [13]).

Напомним, что доказательство (32) в перенормировочной схеме с мягкой массой [14] сводится с помощью (33) – (34) к установлению справедливости следующих оценок ($\gamma\subseteq\Gamma^{(M)}$):

$$\begin{aligned}
&\overline{\deg}_{w^\gamma,p^\gamma,s}[\tau_\gamma Y_\gamma]\leqslant\overline{\deg}_{w^\gamma,p^\gamma,s}Y_\gamma, && \bar\gamma(U_H)\parallel H,\\
&\overline{\deg}_{w^\gamma}[\tau_\gamma Y_\gamma]\leqslant\overline{\deg}_{w^\gamma}Y_\gamma, && \bar\gamma(U_H)\not\parallel H,\\
&\overline{\deg}_{w^\gamma}[(1-\tau_\gamma)Y_\gamma]\leqslant\overline{\deg}_{w^\gamma,p^\gamma,s}Y_\gamma-\max\{\delta(\gamma),\rho(\gamma)\}-1, && \bar\gamma(U_H)\parallel H,\\
&\overline{\deg}_{w^\gamma,p^\gamma,s}[\tau_\gamma Y_\gamma]\leqslant\overline{\deg}_{w^\gamma}Y_\gamma+\max\{\delta(\gamma),\rho(\gamma)\}, && \bar\gamma(U_H)\not\parallel H.
\end{aligned} \tag{35}$$

Учтем далее следующие простые факты:

1) все оценки (35) остаются в силе при замене

$$\overline{\deg}_{w^\gamma}\to\overline{\deg}_{w^\gamma,\lambda_0},\quad \overline{\deg}_{w^\gamma,p^\gamma,s}\to\overline{\deg}_{w^\gamma,p^\gamma,s,\lambda_0};$$

2) в частном случае $M=0$ (т.е. без вставок $\Delta_{\sigma\sigma}$, $\int d^3x\mathcal{N}_3{}^3[\sigma(\varphi^2)^2]_\otimes(x)$):

$$\max_H\{\overline{\deg}_{w^\Gamma,\lambda_0}\overset{(+)}{\mathcal{R}}_{\Gamma(0)}+\dim H\}<0; \tag{32a}$$

3) любому графу вида $\Gamma^{(M)}$ можно сопоставить граф $\tilde\Gamma$, содержащий только обычные лагранжевые вершины, так что $\Gamma^{(M)}=\tilde\Gamma/\{\zeta^1,\ldots,\zeta^M\}$, где $\zeta^j\equiv\overset{j}{\zeta}_{(0,2)}$ или $\zeta^j\equiv\overset{j}{\zeta}_{(4,1)}$ – некоторые фиксированные диаграммы, соответствующие вершинам $V_j=V[\sigma^2]$ или $V_j=V[\sigma(\varphi^2)^2]$ в $\Gamma^{(M)}$. Аналогичным образом каждой $\gamma\subset\Gamma^{(M)}$ сопоставляется $\tilde\gamma\subset\tilde\Gamma$. Тем самым каждому $\Gamma^{(M)}$-лесу U соответствует однозначно $\tilde\Gamma$-лес $\tilde U$. Гиперплоскости H сопоставляется гиперплоскость $\tilde H\supset H$ в пространстве внутренних импульсов $\tilde\Gamma$, определяемая однозначно требованием: для каждого полного относительно H $\Gamma^{(M)}$-леса U_H соответствующий $\tilde U_H$-лес полный относительно $\tilde H$. Тогда, если

$\bar{\gamma}(U_H)\parallel H$ содержит $M(\bar{\gamma}(U_H))$ вершин $V_j \equiv V[\sigma^2]$, $V[\sigma(\varphi^2)^2]$, имеем

$$\overline{\deg}_{w^\gamma,\, p^\gamma,\, s,\, \lambda_0} I_{\bar{\gamma}(U_H)} = \overline{\deg}_{w^{\tilde{\gamma}},\, p^\gamma,\, s,\, \lambda_0} I_{\tilde{\bar{\gamma}}(\tilde{U}_H)} + M(\bar{\gamma}(U_H)) + \sum_{V_i \in \bar{\gamma}(U_H)} \dim H(\zeta^j), \quad \{w^{\tilde{\gamma}}\} = \{w^\gamma\} \cup \Big[\bigcup_{V_j \in \bar{\gamma}(U_H)} \{W^{\zeta^j}\}\Big] \tag{36}$$

и $H(\zeta^j)$ означает гиперплоскость, натянутую на все внутренние импульсы $\{w^{\zeta^j}\}$ поддиаграммы ζ^j.

С помощью (33)–(36) и индукцией по $\gamma \in U_H$ в точности, как при доказательстве УФС перенормировочной схемы с мягкой массой [14], получаем

$$\max_H \{\overline{\deg}_{w^\Gamma,\, \lambda_0} \mathscr{R}^{(+)}_{\Gamma(M)} + \dim H\} \leqslant \max_{\tilde{H}} \{\deg_{w^{\tilde{\Gamma}},\, \lambda_0} \mathscr{R}^{(+)}_{\tilde{\Gamma}} + \dim \tilde{H}\} + M,$$

откуда после применения (32а) следует (31).

Утверждение (30в) эквивалентно следующему неравенству:

$$\max_H \{\deg_{w^\Gamma,\mu} \mathscr{R}_\Gamma + \dim H\} \leqslant 0,$$

которое доказывается индукцией по $\gamma \in U_H$, $\gamma \subset \Gamma$ с помощью (33)–(35) и оценок

$$\overline{\deg}_{w^\gamma,\mu}[\tau_\gamma Y_\gamma] \leqslant \overline{\deg}_{w^\gamma,\mu} Y_\gamma, \quad \bar{\gamma}(U_H) \not\parallel H,$$

$$\overline{\deg}_{w^\gamma,\mu}[(1-\tau_\gamma) Y_\gamma] \leqslant \overline{\deg}_{w^\gamma, p^\gamma, s} Y_\gamma - \delta(\gamma), \quad \bar{\gamma}(U_H) \parallel H.$$

Утверждение (30б) доказывается аналогично (30а), а (30г) аналогично (30в).

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
22 сентября 1978 г.

Литература

[1] Е. Р. Нисимов, С. И. Пачева. ТМФ, 41, 55, 1979.
[2] J. Lowenstein, W. Zimmermann. Nucl. Phys., B86, 77, 1975; Commun. Math. Phys., 46, 105, 1976; J. Lowenstein. Commun. Math. Phys., 47, 53, 1976.
[3] W. Zimmermann. In: «Lectures on elementary particles and quantum field theory», eds. S. Deser, M. Grisaru, M. Pendleton, MIT Press, Cambridge, 1970. W. Zimmermann. Ann. Phys., 77, 536, 1973.
[4] J. Lowenstein. Commun. Math. Phys., 24, 1, 1971.
[5] T. Clark, J. Lowenstein. Nucl. Phys., B113, 109, 1976.
[6] I. Ya. Aref'eva, E. R. Nissimov, S. J. Pacheva. LOMI preprint E-3-1978, Leningrad, 1978.
[7] S. Weinberg. Phys. Rev., 118, 838, 1960.
[8] B. Schroer. Phys. Rev., B8, 4200, 1973. B. Schroer, F. Jegerlehner. Acta Phys. Austr., Suppl., XI, 389, 1973. F. Jegerlehner. Fortschr. Phys., 23, 71, 1975.
[9] C. Di Castro, G. Jona-Lasinio, L. Peliti. Ann. Phys., 87, 327, 1974.
[10] E. Brezin, J. C. LeGuillou, J. Zinn-Justin. In: «Phase transitions and critical phenomena», vol. 6, eds. C. Domb, M. Green, Academic Press, 1976.
[11] R. Abe, S. Hikami. Progr. Theor. Phys., 49, 442, 1973.
[12] J. Lowenstein, W. Zimmermann. Commun. Math. Phys., 44, 73, 1975.
[13] W. Zimmermann. Commun. Math. Phys., 15, 208, 1969.
[14] M. Gomes, J. Lowenstein, W. Zimmermann. Commun. Math. Phys., 39, 81, 1974.

CHIRAL FIELD MODEL AND UNIVERSALITY IN THREE DIMENSIONS. II

E. R. NISSIMOV, S. J. PACHEVA

In the framework of the constructed in part I noncanonically soft mass renormalised free of infrared divergencies $1/N$ expansion of the $O(N)$-invariant $(\varphi^2)_3{}^2$ model it is proved that the critical limit does exist and coincides with the conformally invariant critical theory of the $O(N)$-invariant chiral field. The proof relies essentially on the generalised quantum chiral relationships of the universal limit. $1/N$ expansion of (relevant to the field-theoretical description of critical behaviour) superrenormalizable «temperature» and «magnetic field» perturbations of the preasymptotic and critical theories are also constructed in this renormalization scheme.